

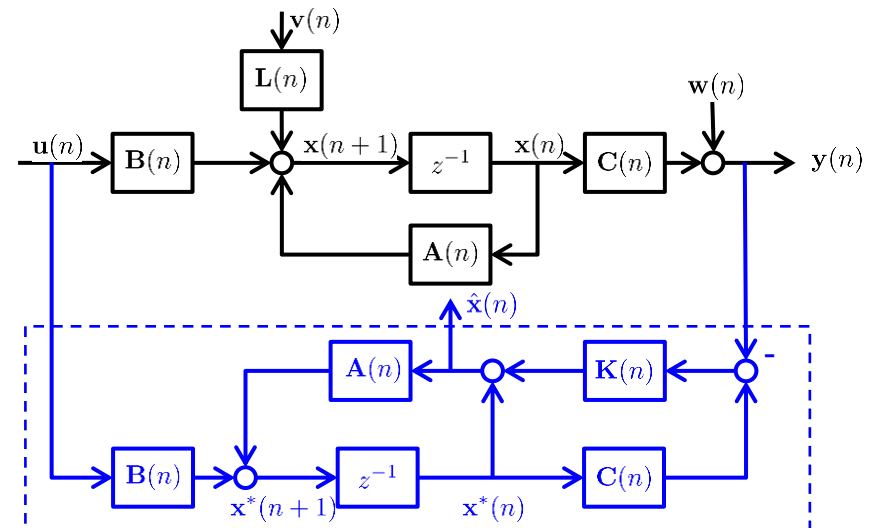
8. Übung Methoden der Signalverarbeitung

Wintersemester 2014/2015

Institut für Industrielle Informationstechnik

Kalman Filter

1. Systemmodell
2. Gleichungen und Struktur
3. Varianz von Fehlersignalen



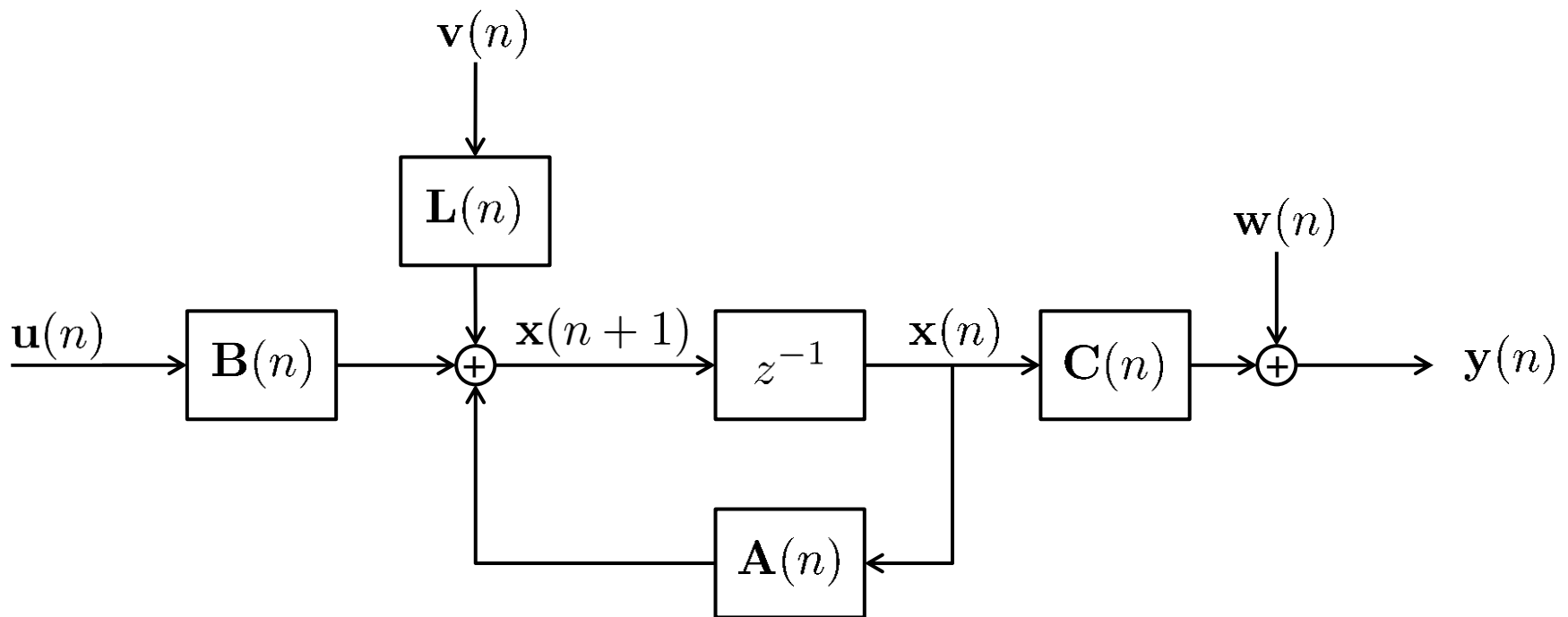
Informationen zur Prüfung

- Termin: 16.02.2015, 15:00 – 17:00
- Anmeldeschluss: 09.02.2015
- Ort: Gerthsen Hörsaal
- **Zulässige Hilfsmittel:**
 - 3 Bücher
 - Eine gebundene Fassung (Spiralbindung/Leimbindung) der Vorlesungsfolien ist **als eines** der drei Bücher zugelassen
 - **Theorieteile** der Übungsblätter (gebunden)
 - Max. 3 doppelseitige handschriftlich beschriebene DIN-A4 Blätter (gebunden/geheftet) zum Vorlesungsstoff, keine Aufgaben/Lösungen
 - Taschenrechner mit gelöschtem Programmspeicher (keine Grafik-Anzeige)
- Bitte verwenden Sie in der Klausur **keinen Bleistift** und **keine Stifte mit roter Farbe**

1. Systemmodell

■ Zustandsraummodell

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{A}(n)\mathbf{x}(n) + \mathbf{B}(n)\mathbf{u}(n) + \mathbf{L}(n)\mathbf{v}(n)$$
$$\mathbf{y}(n) = \mathbf{C}(n)\mathbf{x}(n) + \mathbf{w}(n)$$



1. Systemmodell

Voraussetzungen

- Systemrauschen (WGN):

$$E \{ \mathbf{v}(n) \} = \mathbf{0} \quad E \{ \mathbf{v}(n) \mathbf{v}^T(n) \} = \mathbf{Q}(n) \cdot \delta(n - m)$$

- Messrauschen (WGN):

$$E \{ \mathbf{w}(n) \} = \mathbf{0} \quad E \{ \mathbf{w}(n) \mathbf{w}^T(n) \} = \mathbf{R}(n) \cdot \delta(n - m)$$

- Rauschprozesse unkorreliert zueinander und zum Anfangszustand:

$$E \{ \mathbf{v}(n) \mathbf{w}^T(m) \} = 0 \quad E \{ \mathbf{v}(n) \mathbf{x}^T(0) \} = \mathbf{0} \quad E \{ \mathbf{w}(n) \mathbf{x}^T(0) \} = \mathbf{0}$$

- 1. und 2. Moment des Anfangszustandes bekannt:

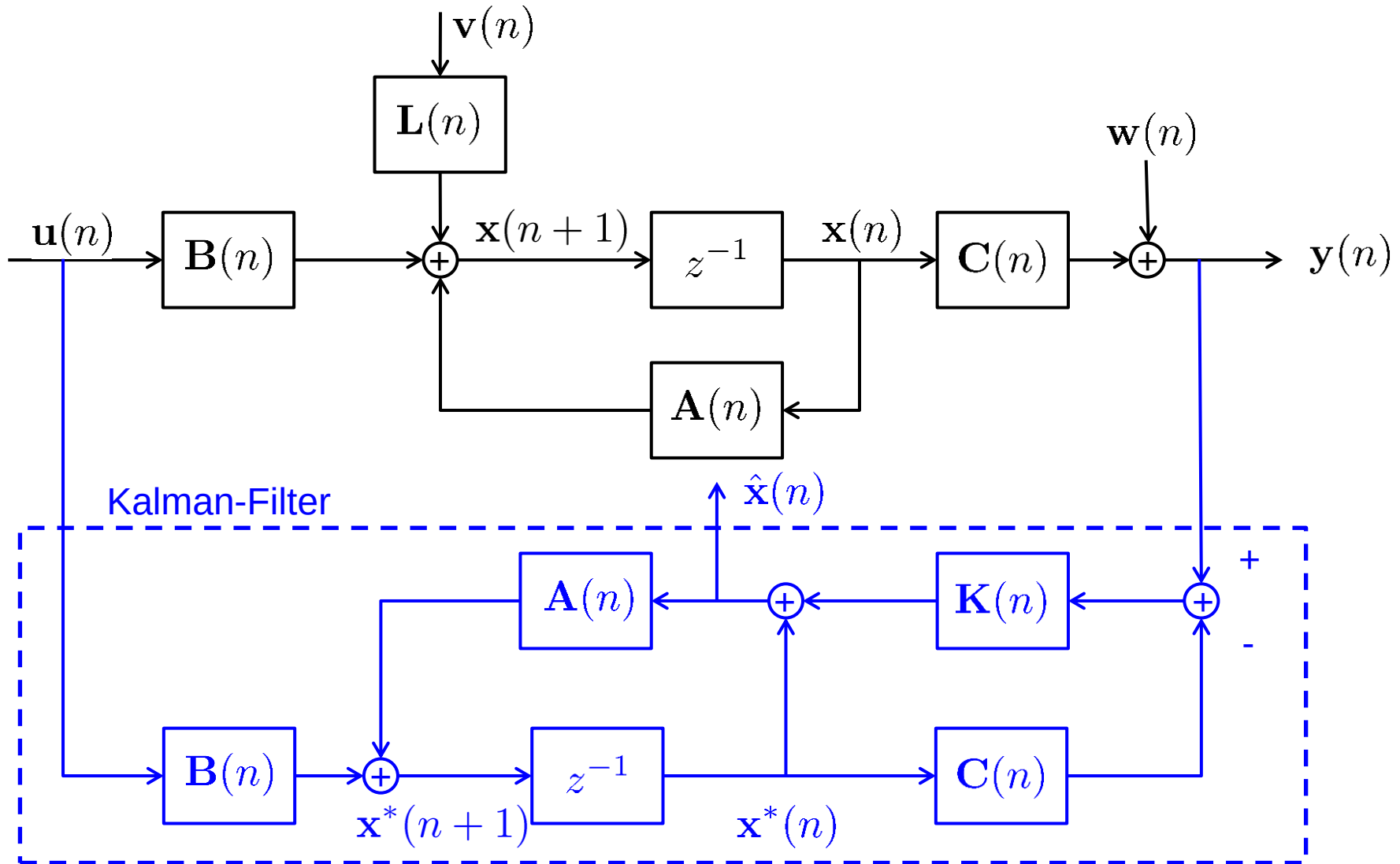
$$\hat{\mathbf{x}}(0) = E \{ \mathbf{x}(0) \} \quad \hat{\mathbf{P}}(0) = E \{ (\mathbf{x}(0) - \hat{\mathbf{x}}(0)) (\mathbf{x}(0) - \hat{\mathbf{x}}(0))^T \}$$

1. Systemmodell

Problemstellung: optimale Zustandsschätzung gesucht

- Beobachtungsproblem liegt vor
- System und Störprozesse sind zeitvariant
- nicht messbarer Einfluss auf Zustände durch Systemrauschen
- Ausgangsvektor nicht direkt messbar, sondern von Störungen überlagert

2. Gleichungen und Struktur



2. Gleichungen und Struktur

■ Prädiktionsschritt

Berechnung der ersten beiden Momente der A-priori-Dichte

$$f(\mathbf{x}(n+1)|\mathbf{y}(0), \dots, \mathbf{y}(n))$$

mit Hilfe eines internen Systemmodells

■ Prädiktionsschätzwert

$$\mathbf{x}^*(n+1) = \mathbf{A}(n)\hat{\mathbf{x}}(n) + \mathbf{B}(n)\mathbf{u}(n)$$

■ Prädiktionskovarianzmatrix

$$\mathbf{P}^*(n+1) = \mathbf{A}(n)\hat{\mathbf{P}}(n)\mathbf{A}^T(n) + \mathbf{L}(n)\mathbf{Q}(n)\mathbf{L}^T(n)$$

2. Gleichungen und Struktur

■ Filterschritt

Berechnung der ersten beiden Momente der A-posteriori-Dichte

$$f(\mathbf{x}(n+1)|\mathbf{y}(0), \dots, \mathbf{y}(n+1))$$

unter Ausnutzung des neuen Messwertes $\mathbf{y}(n+1)$

■ Filterschätzwert

$$\hat{\mathbf{x}}(n+1) = \mathbf{x}^*(n+1) + \mathbf{K}(n+1)(\mathbf{y}(n+1) - \mathbf{C}(n+1)\mathbf{x}^*(n+1))$$

■ Filterkovarianzmatrix

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{P}}(n+1) = & (\mathbf{I} - \mathbf{K}(n+1)\mathbf{C}(n+1)) \cdot \mathbf{P}^*(n+1) \\ & \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{K}(n+1)\mathbf{C}(n+1))^T \\ & + \mathbf{K}(n+1)\mathbf{R}(n+1)\mathbf{K}^T(n+1) \end{aligned}$$

2. Gleichungen und Struktur

■ Verstärkungsmatrix

$$\mathbf{K}(n+1) = \mathbf{P}^*(n+1) \mathbf{C}^T(n+1) \cdot \left(\mathbf{C}(n+1) \mathbf{P}^*(n+1) \mathbf{C}^T(n+1) + \mathbf{R}(n+1) \right)^{-1}$$

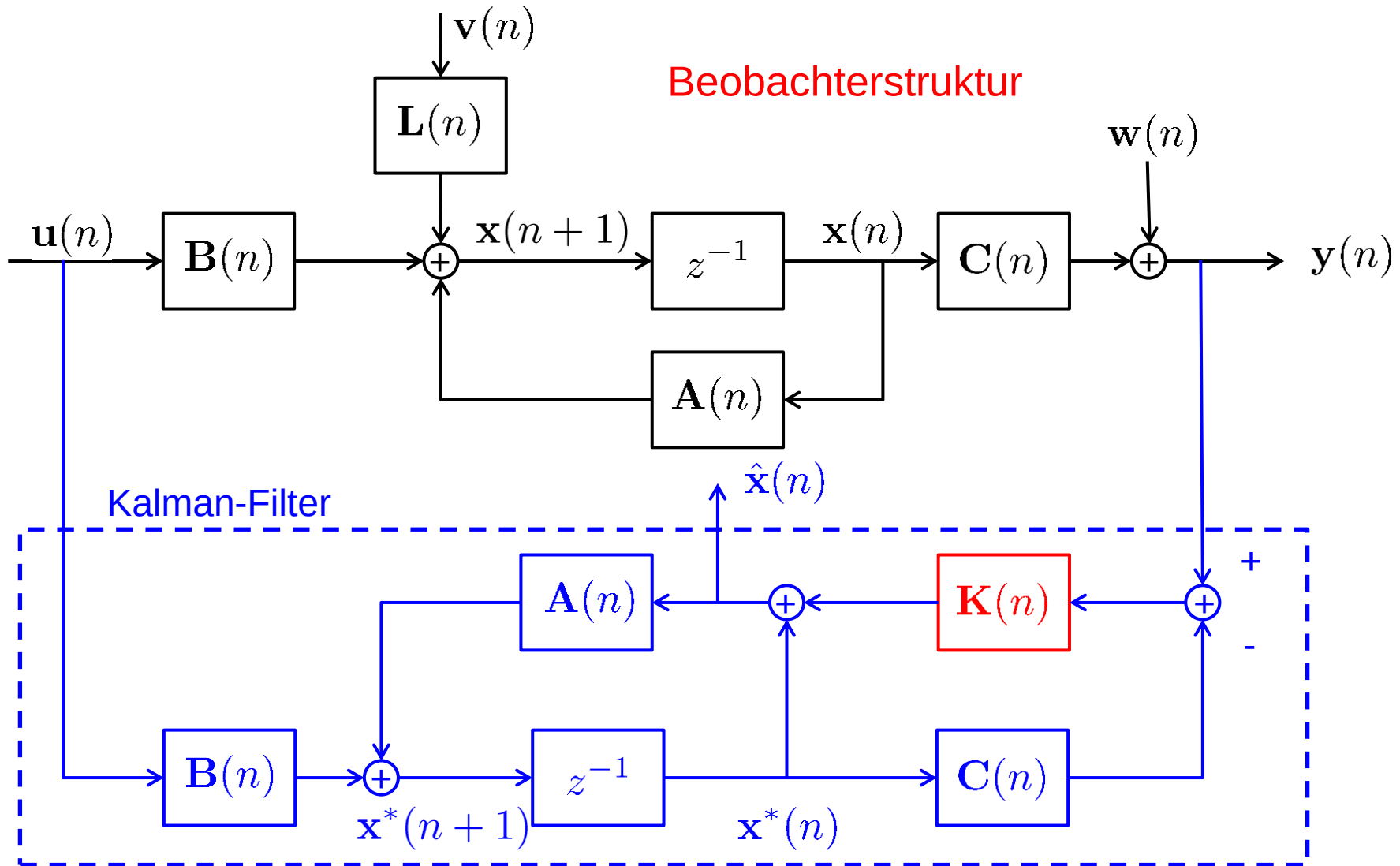
- Durch diese Wahl des Verstärkungsfaktors wird die quadratische Norm des Schätzfehlers minimiert

$$E \left\{ |\hat{\mathbf{x}}(n) - \mathbf{x}(n)|^2 \middle| \mathbf{y}(0), \dots, \mathbf{y}(n) \right\} \rightarrow \min$$

■ Automatische Anpassung des Kalman-Filters:

- schwache Rückkopplung bei starkem Messrauschen $\mathbf{K}(n) \approx \mathbf{0}$
→ Messvektor unzuverlässig
- starke Rückkopplung bei starkem Systemrauschen
→ Prädiktion unzuverlässig

2. Gleichungen und Struktur



3. Varianz von Fehlersignalen

- **Ausgangsrauschen:** Falls Varianz nicht bekannt → Schätzung

$$\bar{\mathbf{y}}(n) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} \mathbf{y}(n-i)$$
$$\mathbf{R}(n) \approx \frac{1}{N-1} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} (\mathbf{y}(n-i) - \bar{\mathbf{y}}(n)) \cdot (\mathbf{y}(n-i) - \bar{\mathbf{y}}(n))^T$$

- **Systemrauschen:** Varianz häufig als „Tuning-Parameter“, beispielsweise um Modellungenauigkeiten zu berücksichtigen, die die Prädiktion unzuverlässig machen
- Weitere Möglichkeit: Qualitatives Wissen (z.B. über Sensoren) einbringen, um Parameter festzulegen

Aufgaben

Aufgabe 1: Entwurf eines Kalman-Filters

Gegeben ist folgendes System im Zustandsraum:

$$x(n+1) = 0,5x(n) + u(n) + v(n)$$

$$y(n) = x(n) + w(n)$$

Dabei ist $u(n)$ die deterministische Eingangsgröße des Systems, $v(n)$ ist das Systemrauschen, $w(n)$ das Messrauschen.

- a) Wie lauten die Kalman-Rekursionsgleichungen für das gegebene System?
- b) Zeichnen Sie ein Blockschaltbild für das gegebene System und das Kalman-Filter.

Im Folgenden gilt für die Varianzen der Rauschprozesse: $Q(n) = R(n) = 1$.

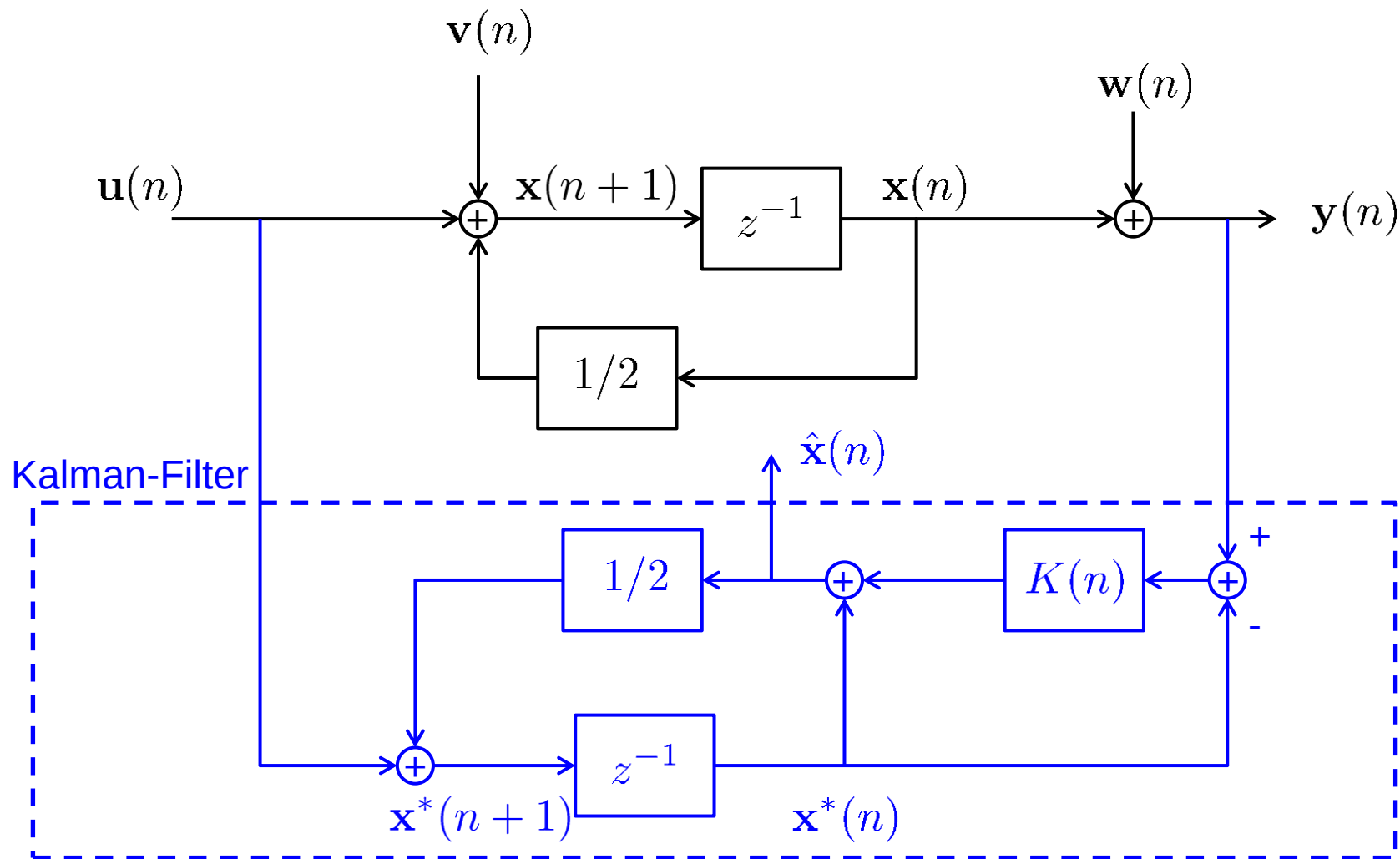
- c) Berechnen Sie $K(n)$ für $n = 1, \dots, 4$. Als Startwert ist $\hat{P}(0) = 10$ vorgegeben.
- d) Da ein zeitinvariantes System und zeitinvariante Rauschprozesse vorliegen, konvergiert der Verstärkungsfaktor für $n \rightarrow \infty$. Berechnen Sie den stationären Endwert.

Hinweis: Stellen Sie zunächst eine Rekursionsgleichung der Form

$$\hat{P}(n+1) = f(\hat{P}(n))$$

auf. Der Grenzwert $\hat{P}_\infty := \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{P}(n)$ erfüllt die Gleichung $\hat{P}_\infty = f(\hat{P}_\infty)$.

Aufgabe 1b): Blockschaltbild



Aufgabe 2: Kalman-Filter zur Positionsbestimmung eines Fahrzeuges

Zur zeitdiskreten Positionsbestimmung eines Fahrzeuges werden die Weg- und die Winkeländerung pro Abtastschritt mit Hilfe eines Gierratensensors³, Inkrementalgebern an den Rädern (ABS-Sensoren) sowie Beschleunigungssensoren erfasst. Durch die große Anzahl an Sensoren ergibt sich eine Redundanz bei der Berechnung der Fahrzeugposition. Diese Redundanz wird bei der Sensor-Datenfusion genutzt, um den Einfluss von Messfehlern zu verringern. Dafür eignet sich das Kalman-Filter.

In dieser Aufgabe soll ein Kalman-Filter zur Schätzung des Winkels θ des Fahrzeuges (bezüglich eines ortsfesten Koordinatensystems) entworfen werden. Aus den Inkrementalgebern wird in jedem Abtastschritt eine Winkeländerung $\Delta\theta_{IG}$ ermittelt. Der Gierratensensor liefert einen absoluten Wert θ_{Gier} für den Winkel. Beide Größen sind durch überlagertes weißes Rauschen $\tilde{v}(n)$ bzw. $w(n)$ verfälscht:

$$\Delta\theta_{IG}(n) = \Delta\theta + \tilde{v}(n) \quad (1a)$$

$$\theta_{Gier}(n) = \theta + w(n) \quad (1b)$$

Die Varianzen der Störprozesse $\sigma_v^2(n)$ und $\sigma_w^2(n)$ sind durch Schätzung bekannt. Die ungestörten Sensorsignale sind nicht zugänglich.

Der absolute Fahrzeugwinkel kann durch Summation der Winkeländerungen in jedem Zeitschritt rekursiv berechnet werden:

$$\theta(n+1) = \theta(n) + \Delta\theta(n)$$

³Die Gierrate ist die Winkelgeschwindigkeit der Drehung um die Fahrzeughochachse relativ zu einem ortsfesten Koordinatensystem. Dabei ist die Hochachse die senkrechte Achse durch den Fahrzeugschwerpunkt.

Durch Einsetzen von Gleichung (1a) ergibt sich:

$$\theta(n+1) = \theta(n) + \Delta\theta_{IG}(n) - \tilde{v}(n)$$

Der stochastische Prozess $v(n) := -\tilde{v}(n)$ ist ebenfalls ein weißer Rauschprozess. Mit dieser neuen Bezeichnung sowie Gl. (1b) ergibt sich ein zeitdiskretes Zustandsraummodell:

$$\theta(n+1) = \theta(n) + \Delta\theta_{IG}(n) + v(n) \quad \text{Zustandsgleichung}$$

$$\theta_{Gier}(n) = \theta(n) + w(n) \quad \text{Ausgangsgleichung}$$

Diese Gleichungen beschreiben ein System mit dem realen Winkel als Zustandsgröße. Eingangssignal ist die vom Inkrementalgeber ermittelte Winkeländerung, Ausgangssignal der vom Gierratensensor gemessene absolute Winkel. Die Ein- und Ausgangsgröße sind also messbare Größen, die Zustandsgröße ist die gesuchte Größe, die mit Hilfe eines Kalman-Filters geschätzt werden soll.

- a) Geben Sie die Gleichungen des Kalman-Filters an.
- b) Zeichnen Sie das Blockschaltbild des Winkelmesssystems und des Kalman-Filters.
- c) Welchen Schätzwert erhält man, wenn das Signal des Inkrementalgebers stark verrauscht ist im Vergleich zum Gierratensensor, d. h. $\sigma_v^2 \gg \sigma_w^2$?
- d) Welchen Schätzwert erhält man, wenn das Signal des Gierratensensors stark verrauscht ist im Vergleich zum Inkrementalgeber, d. h. $\sigma_w^2 \gg \sigma_v^2$?

Aufgabe 2b): Blockschaltbild

